

Александр Бродский

Метод переменных параметров и нелинейные краевые задачи

Введение

Одной из наиболее трудных задач нелинейного анализа является нахождение точек бифуркации и определение ветвей решений нелинейных краевых задач для уравнений с частными производными [1,2,7,8]. Теория возмущений не может применяться в окрестности данной точки бифуркации, а численные методы требуют, чтобы ветви решений были выбраны до того, как эти методы могут быть использованы [7].

В части 1 рассмотрен метод переменных параметров и его применение для получения аналитического решения одномерной нелинейной краевой задачи, чтобы ввести основные понятия этого метода и применить его к n -мерному случаю.

В части 2, метод переменных параметров обсуждается применительно к n -мерным нелинейным краевым задачам. Он использован и в 1-мерном случае, для сравнения результатов с аналитическим решением, и в 2-мерном случае, чтобы продемонстрировать способность данного метода вычислять бифуркационное решение в многомерном случае.

В части 3, метод переменных параметров применен к уравнениям квантовой теории поля (уравнение двухямого потенциала и уравнение Гросса-Питаевского) чтобы продемонстрировать, что бифуркация возможна в этих моделях. Оказывается, что применение этих методов является решающим для получения результатов из уравнений квантовой теории поля. Аналитические решения полученные методом переменных параметров демонстрируют, что необходимо учитывать глобальную структуру пространства-времени для того, чтобы точно определить граничные условия для нелинейных уравнений квантовой теории поля.

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕТОДА ПЕРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ

Рассмотрим следующую 1-мерную краевую задачу на отрезке $[-1; 1]$:

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) = -D \theta(u),$$

$$u(-1) = u(1) = 0, \tag{1}$$

$$D > 0,$$

где D - свободный параметр и $\theta(u) = e^u$. Точка $D = D_b$ существует так, что система (1) достигает там точки бифуркации и для $D < D_b$ имеет два решения. Для доказательства этого рассмотрим альтернативную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} u(x) &= -D \theta(u), \\ u(-1) &= u(1) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$u(0) = r, \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Здесь r - свободный параметр и $D(r)$ является функцией от r . Используя хорошо известную подстановку $y = u'(x)$, $x = x(u)$, система (2) может быть решена аналитически и решение может быть представлено следующим образом:

$$1 - x(u) = \int_0^u \frac{d\eta}{\sqrt{2D \int_{\eta}^r \theta(\xi) d\xi}}. \quad (3)$$

Подстановка граничного условия $u(1) = 0$ в (3) дает:

$$\sqrt{D(r)} = \int_0^r \frac{d\eta}{\sqrt{2 \int_{\eta}^r \theta(\xi) d\xi}} = \int_0^r \frac{d\eta}{\sqrt{2(e^r - e^{\eta})}} = \sqrt{2} e^{\frac{r}{2}} \ln(\sqrt{e^r - 1} + e^{\frac{r}{2}}). \quad (4)$$

Это выражение можно привести к виду

$$D(r) = 2e^{-r} (\operatorname{atanh} \sqrt{1 - e^{-r}})^2. \quad (5)$$

График функции $D(r)$ представлен на Рис.1.

Легко видеть, что для $D < D(r_b)$, система (1) имеет два решения, тогда как решение к (2) остается единственным для любых r . Таким образом, формулировка краевой задачи (1) в виде альтернативной краевой задачи (2) дает нам возможность вычислить и представить обе ветви решений единым способом.

II. МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ В N -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Решая задачу (1) в 1-мерном случае, мы могли ввести переменный параметр $u(0) = r$ успешно потому, что мы знали *a priori* (благодаря симметрии задачи), что $x = 0$ является максимальной точкой функции $u(x)$. Для n -мерного случая, в котором $n > 1$, этот подход неприменим. Но естественно предположить, что некоторый вид функционала, $F(u(\mathbf{x}))$,

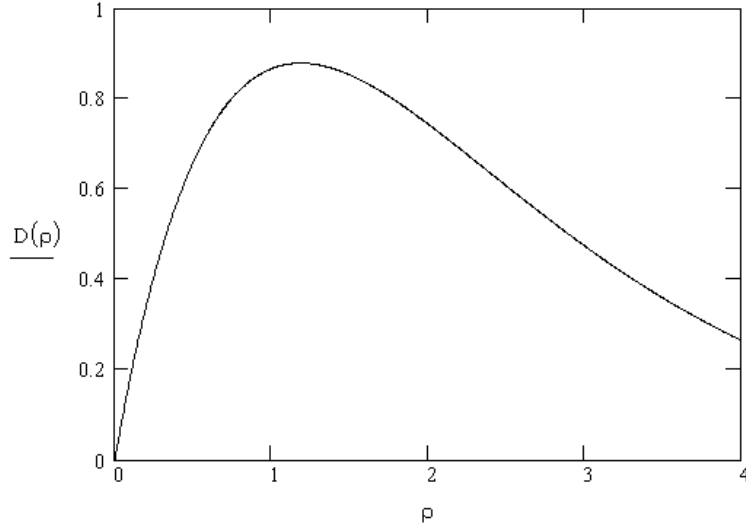


Рис. 1:

Для $D = D(r_b)$, $r_b = 1.1875$, система (1) имеет точку бифуркации и ее решение единственно.

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, может быть использован в качестве переменного параметра. Выбор этого функционала может изменяться в зависимости от специфики задачи. Для того, чтобы установить соответствующий переменный параметр r , рассмотрим следующую нелинейную краевую задачу в области $G \in \mathbb{R}^n$:

$$\Delta u(\mathbf{x}) = -D\theta(u(\mathbf{x})) \quad \text{на } G, \quad (6)$$

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial G,$$

где $\theta(u) > 0$ является аналитической, $D > 0$ и ∂G - замкнутая, гладкая граница области G . Краевая задача (6) имеет, в общем случае, много решений. Предположительно говоря, для того, чтобы параметризовать эти решения необходимо сделать D зависящим от переменного параметра r :

$$\Delta u(\mathbf{x}) = -D(r)\theta(u(\mathbf{x})) \quad \text{на } G, \quad (7)$$

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial G.$$

Система (7) является эквивалентной и альтернативной системе (6), и в этом смысле r является переменным параметром D . Наша цель состоит в том, чтобы выбрать параметр r таким образом, чтобы каждое решение краевой задачи (6) соответствовало точке на плоскости $D - r$, так, что множество всех решений системы (7) может быть представлено как кривая на этой плоскости (например, Рис.2). Эту цель можно достичь вводя следующий

переменный параметр r , определенный как

$$r = \int_G f(u) d\mathbf{x}, \quad (7')$$

где

$$f(u) = \int_0^u \theta(\xi) d\xi.$$

Решение $u(\mathbf{x})$ краевой задачи (6) является бифуркационным тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$ является собственным значением следующей линейной краевой задачи:

$$\Delta v(\mathbf{x}) + D(\tau) \theta'(u) v(\mathbf{x}) = \lambda v(\mathbf{x}) \quad \text{на } G, \quad (8)$$

$$v(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial G,$$

где

$$\theta'(u) = \frac{d\theta(u)}{du}.$$

Существует [3] некоторая окрестность точки бифуркации, такая, что решения задачи (6) могут быть параметризованы некоторым параметром τ , и эти решения являются дифференцируемыми по этому параметру. Без потери общности, мы можем положить $\tau = 0$ в точке бифуркации. Дифференцируя уравнение (6) по τ , получаем:

$$\Delta w(\mathbf{x}) + D(0) \theta'(u) w(\mathbf{x}) + \frac{dD}{d\tau} \theta(u) = 0, \quad (9)$$

где мы задаем $w(\mathbf{x}) = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \tau}$. Умножая обе стороны (9) на $u(\mathbf{x})$ и $w(\mathbf{x})$, а затем интегрируя по G , мы получаем следующие уравнения:

$$D(0) \int_G (\theta(u) - \theta'(u) u) w d\mathbf{x} = \frac{dD(0)}{d\tau} \int_G \theta(u) u d\mathbf{x} \quad (10)$$

и

$$\frac{dD(0)}{d\tau} \frac{dr(0)}{d\tau} = \int_G (\nabla w)^2 d\mathbf{x} - D(0) \int_G \theta(u) w d\mathbf{x}, \quad (11)$$

соответственно. Нормируя v условием $\int_G v^2 d\mathbf{x} = 1$, умножая уравнение (8) на v и интегрируя по G , мы получаем следующее:

$$\lambda = \frac{\int_G [(\nabla v)^2 - D(\tau) \theta'(u)] d\mathbf{x}}{\int_G v^2 d\mathbf{x}} = \frac{dD(\tau)}{d\tau} \frac{dr(\tau)}{d\tau}. \quad (12)$$

Рассмотрим как изменяются собственные значения пертурбационной задачи (8) при возрастании параметра r . Для $r = 0$, решение краевой задачи (7) тривиально и равно нулю.

Существует окрестность около $r = 0$ такая, что там r и D достаточно малы, а все собственные значения (8) положительные. Эти собственные значения обычно убывают при возрастании r и в точке $r = r_b$ первое собственное значение (8) - $\lambda_1(r)$ - достигает нуля, означая, что возникает бифуркация. Соответствующая первая собственная функция (8), $w(\mathbf{x}, r_b) = v_1(\mathbf{x})$, не может быть отрицательной, следовательно,

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \int_G f(u) d\mathbf{x} = \int_G \theta(u) \frac{\partial u}{\partial \tau} d\mathbf{x} = \int_G \theta(u) v_1 d\mathbf{x} > 0. \quad (13)$$

Но из (12) и (13) следует, что r может быть использован как переменный параметр, чтобы определить решение в некоторой окрестности первой точки бифуркации в задаче (6).

Анализируя уравнение (11), мы делаем вывод, что параметры $D(\tau)$ и $r(\tau)$ не могут достигать экстремума одновременно, потому что если они должны достигать экстремума одновременно в точке τ_0 , правая часть уравнения (11) является выражением второго порядка по $(\tau - \tau_0)$, тогда как левая часть (11) пропорциональна $\lambda(\tau)$ и, следовательно, является выражением первого порядка по $(\tau - \tau_0)$ при $\tau \rightarrow \tau_0$. В самом деле, очевидно, что если $\lambda(\tau)$ пропорциональна второму порядку по $(\tau - \tau_0)$, тогда $(\tau = \tau_0)$ не является точкой бифуркации. Это позволяет нам ввести длину кривой τ на плоскости $D - r$ (Рис. 2), определенную формулой

$$d\tau = \sqrt{dD^2 + dr^2},$$

как окончательный переменный параметр в системе (6) и использовать его не только для первой бифуркации, но также и для остальных бифуркаций.

Рассмотрим возможность второй бифуркации. Существует некоторая окрестность точки бифуркации $D = D_b, \tau = \tau_0$, такая, что $w(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) + O((\tau - \tau_b)^2)$. После первой бифуркации все собственные значения, кроме первого, являются положительными. Вторая бифуркация в пертурбационной задаче (8) может возникнуть только в двух случаях. Случай 1: первое собственное значение возрастает и достигает нуля; Случай 2: второе собственное значение убывает и достигает нуля.

В Случае 1, непосредственно перед второй бифуркацией первое собственное значение отрицательно. Соответственно, правая часть уравнения (11) отрицательна, тогда как $dD(\tau)/d\tau$ также является отрицательным. Следовательно, $dr(\tau)/d\tau$ положительна.

В Случае 2, непосредственно перед второй бифуркацией второе собственное значение положительно. Соответственно, правая часть уравнения (11) положительна, тогда как $dD(\tau)/d\tau$ является отрицательным. Следовательно, $dr(\tau)/d\tau$ отрицательна и параметр r достигает экстремума между первой и второй бифуркациями.

В Случае 1, сразу после второй бифуркации все собственные значения задачи (8) положительны. Если первое собственное значение снова достигает нуля и возникает третья бифуркация, то параметр r не достигает экстремума между второй и третьей бифуркациями и может быть использован как переменный параметр для третьей бифуркации. По индукции, если решение задачи (7-7') единственно, то оно является характерным для всех бифуркаций в задаче (6), в которых первое собственное значение достигает нуля. Эти выводы качественно показаны на Рис. 2 и 3.

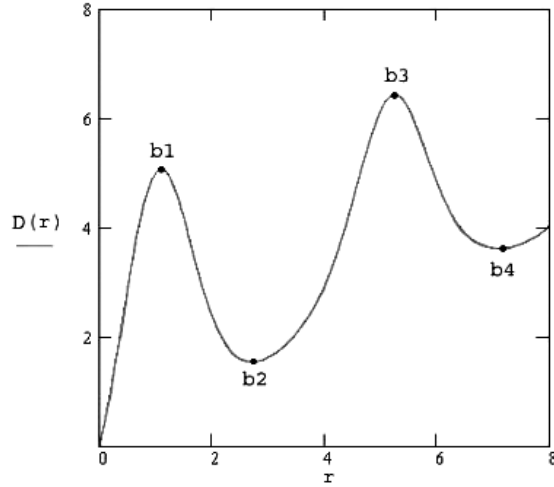


Рис. 2:

Случай 1.

 b_1 - первая бифуркация, $\lambda_1 = 0$; b_2 - вторая бифуркация, $\lambda_2 = 0$; b_3 - третья бифуркация, $\lambda_3 = 0$; b_4 - четвертая бифуркация, $\lambda_4 = 0$.

Если свойства задачи (6) соответствуют графику, представленному на Рис. 2, метод переменных параметров определяемый уравнениями (7 – 7') может быть использован чтобы решить n -мерную краевую задачу (6). (Условия для осуществления такой ситуации, соответствующей графику на Рис. 3, не обсуждаются в этой статье.)

Решение $u(\mathbf{x})$ получено в виде ряда Тейлора:

$$u(\mathbf{x}) = r \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\mathbf{x}) r^k, \tag{14}$$

$$D(r) = r \sum_{k=0}^{\infty} D_k r^k.$$

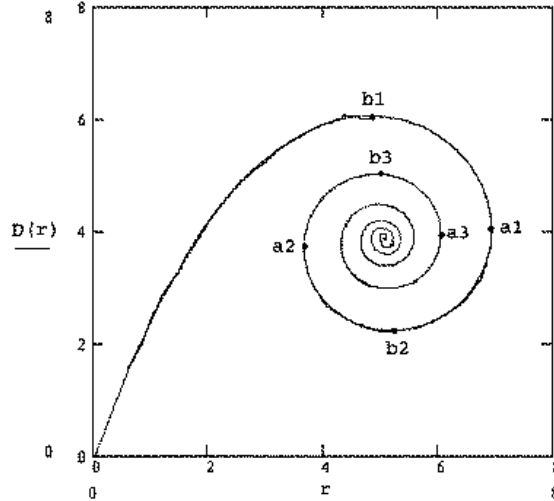


Рис. 3:

Случай 2.

 b_1 - первая бифуркация, $\lambda_1 = 0$ b_2 - вторая бифуркация, $\lambda_2 = 0$ b_3 - третья бифуркация, $\lambda_3 = 0$ a_1, a_2, a_3 - точки бифуркации параметра r .

И кроме того,

$$\theta(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \left(r \sum_{m=0}^{\infty} u_m(\mathbf{x}) r^m \right)^k, \quad (14')$$

$$f(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_{k-1} \left(r \sum_{m=0}^{\infty} u_m(\mathbf{x}) r^m \right)^k.$$

Ясно, что в задаче (7 – 7') в качестве переменного параметра можно использовать любую аналитическую, монотонно возрастающую функцию $p(r)$ вместо параметра r , чтобы удовлетворить исходному уравнению. Такая функция может быть явно задана как ряд Тейлора:

$$p(r) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k r^k. \quad (14'')$$

Выбор этой функции не влияет на результат вычислений, но может ускорить сходимость ряда Тейлора функции $u(\mathbf{x})$ (14). Вычисление коэффициентов этого ряда можно провести следующим образом: можно подставить (14) и (15) в (7) и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях r .

1. Члены ряда Тейлора содержащие r :

$$\begin{aligned}\Delta u_0(\mathbf{x}) &= -d_0 \theta_0, \\ u_0(\mathbf{x}) &= -d_0 \theta_0 \int_G \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y},\end{aligned}\tag{15}$$

$$\int_G \theta(0) u_0 d\mathbf{x} = p_1,$$

которое означает

$$d_0 = -\frac{p_1}{\theta_0 \int_G \int_G \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x}}.\tag{15'}$$

2. Члены ряда Тейлора содержащие r^2 :

$$\begin{aligned}r^2 \Delta u_1(\mathbf{x}) &= -(d_0 r + d_1 r^2)(\theta_0 + \theta_1(u_0 r + u_1 r^2)^2), \\ u_1(\mathbf{x}) &= -\int_G (d_0 \theta_1 u_0 + d_1 \theta_0) \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y},\end{aligned}\tag{16}$$

$$\int_G (\theta(0) u_1 + \frac{1}{2} \theta_1 u_0^2) d\mathbf{x} = p_2 = 0,$$

которое означает

$$d_1 = -\frac{\int_G \left[\frac{1}{2} \theta_1 u_0^2 + \theta_0 \int_G d_0 \theta_1 u_0 \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x} - p_2}{\theta_0^2 \int_G \int_G \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x}}.\tag{16'}$$

В предыдущих вычислениях использована функция Грина $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, определяемая краевой задачей

$$\Delta_{\mathbf{x}} \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y}) \quad \text{на } G,\tag{17}$$

$$\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial G.$$

Эту процедуру можно продолжать до тех пор, пока не достигнута необходимая точность. Аналитическое выражение коэффициентов возможно в том случае, если $\Gamma(\mathbf{x})$ задается аналитическим выражением. Стоит упомянуть, что такая процедура является не пертурбационной, т.к. она не требует каких-либо дополнительных условий, таких как $r \ll 1$.

Для демонстрации этой процедуры, мы применяем ее к 1-мерной задаче (1). Использовалась следующая стратегия: два первых члена ряда Тейлора для $u(\mathbf{x}, r)$ были вычислены с $p(r) = r$, а затем была построена функция

$$p(r) = \exp\left(\frac{2}{3}r + \frac{8}{45}r^2\right)\tag{18}$$

так, что выполнены условия

$$\frac{dD(0)}{dr} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{d^2D(0)}{dr^2} = 0. \quad (18')$$

Такой выбор $p(r)$ не влияет на результаты, зато для получения необходимой точности требуется меньше членов ряда Тейлора (14 – 14'). Результатом вычислений является следующее:

$$D(r) = r - \frac{104}{525}r^3 - \frac{1058}{23625}r^4 + \frac{43171}{1684375}r^5 + \frac{23893132}{1773646875}r^6 + O(r^7). \quad (18'')$$

На Рис. 4 приведено сравнение этого результата и аналитического решения (4). Различие между расчетом $D(r)$ с использованием первых 9 членов ряда Тейлора и аналитическим решением (5) оказывается меньшим чем 0.047%. Интересно отметить, что функции $u_n(x)$ являются точными аналитическими выражениями для членов ряда Тейлора (14). В этом смысле, решения (18'') также оказываются аналитическими решениями задачи (2). То же самое остается в силе для n -мерного случая, если возможно аналитическое выражение функции Грина $G(\mathbf{x})$ (17').

Метод переменных параметров может быть использован для решения задачи (7) с помощью стандартных математических программ (MathCAD, Mathematica, Matlab и т.д.). Чтобы продемонстрировать потенциальные применения метода переменных параметров представленного выше, решена следующая краевая задача:

$$G = (0; 1) \times (0; 1),$$

$$\frac{d^2}{dx^2}u + \frac{d^2}{dy^2}u = -D(r)e^u, \quad (19)$$

$$u = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial G,$$

где r неявно определяется уравнением

$$p(r) = \int_0^1 \int_0^1 (e^u - 1) dx dy, \quad (19')$$

тогда как $p(r)$ построена используя процедуру (18-18'):

$$p(r) = 0.2415352(\exp(0.145387r) - 1). \quad (20)$$

Рассмотрим функции $g_k(x, y)$ и $w_k(x, y)$, неявно заданные уравнениями:

$$D(r)\theta(u) = r \sum_{k=0}^{\infty} D_k r^k \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \left(r \sum_{m=0}^{\infty} u_m(\mathbf{x}) r^m \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (g_k + D_k \theta_k) r^k. \quad (21)$$

$$f(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_{k-1} \left(r \sum_{m=0}^{\infty} u_m(\mathbf{x}) r^m \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (u_k + w_k) r^k,$$

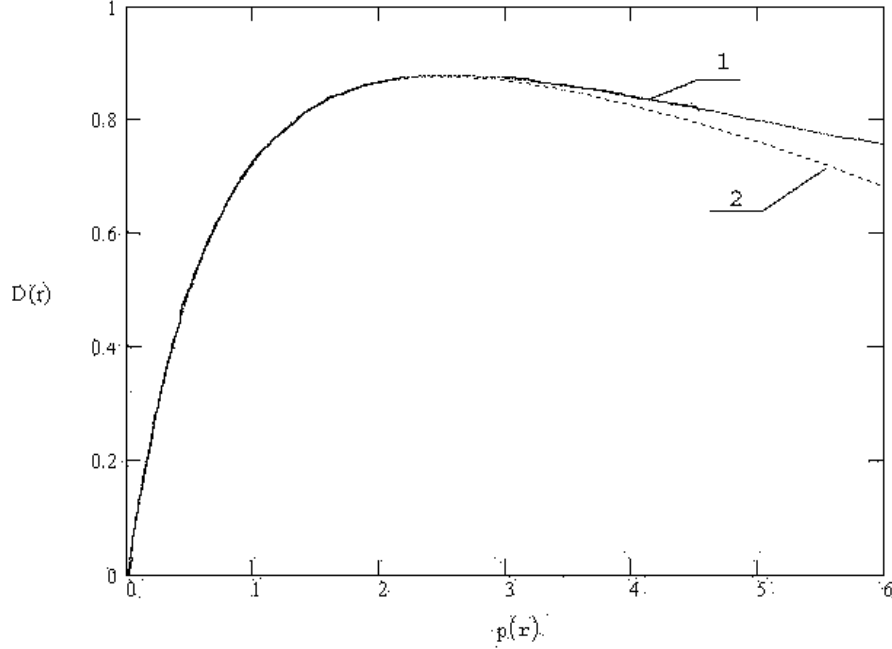


Рис. 4:

1 - $D_1(r)$ - результаты расчета параметра D , используя формулу (4).

2 - $D_2(r)$ - результаты расчета параметра D , используя формулы (15-16').

$p_1(r)$ для первой кривой было вычислено подставляя формулу (3) в (7').

$p_2(r)$ для второй кривой было вычислено используя формулу (18).

$r_b = 1.1875$, $p(r_b) = 2.556$, $D(r_b) = 0.8746$, $p_2(r_b) = 2.556$, $D_2(r_b) = 0.8784$.

где k - индекс соответствующего члена ряда Тейлора. Подставляя g_k и w_k в (14 – 17) и воспользовавшись тем, что g_k и w_k не зависят от u_k и D_k , можно получить следующую рекуррентную формулу:

$$D_k = -\frac{p_k - \theta_0 \int_G (v_k(\mathbf{x}) + w_k(\mathbf{x})) d\mathbf{x}}{\theta_0^2 \int_G I(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}, \quad (22)$$

$$u_k(\mathbf{x}) = v_k(\mathbf{x}) + D_k \theta_0 I(\mathbf{x}),$$

где $v_k(\mathbf{x})$ является решением следующих линейных краевых задач:

$$\Delta v_k(\mathbf{x}) = g_k(\mathbf{x}) \quad \text{на } G, \quad (23)$$

$$v(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial G.$$

а $I(\mathbf{x})$ является решением линейных краевых задач вида:

$$\Delta I(\mathbf{x}) = 1 \quad \text{на } G, \tag{24}$$

$$I(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial G,$$

Вычисление решений линейных краевых задач (23–24), $v_k(\mathbf{x})$ и $I(\mathbf{x})$, проведено с помощью стандартной функции **multigrid**(u,n) в MathCad. Расчет решения нелинейной задачи (19) сделан с использованием первых восьми членов ряда Тейлора, а значения $D(r)$ вычислялись на основе этого расчета. Результаты вычислений представлены на Рис. (5, 6).

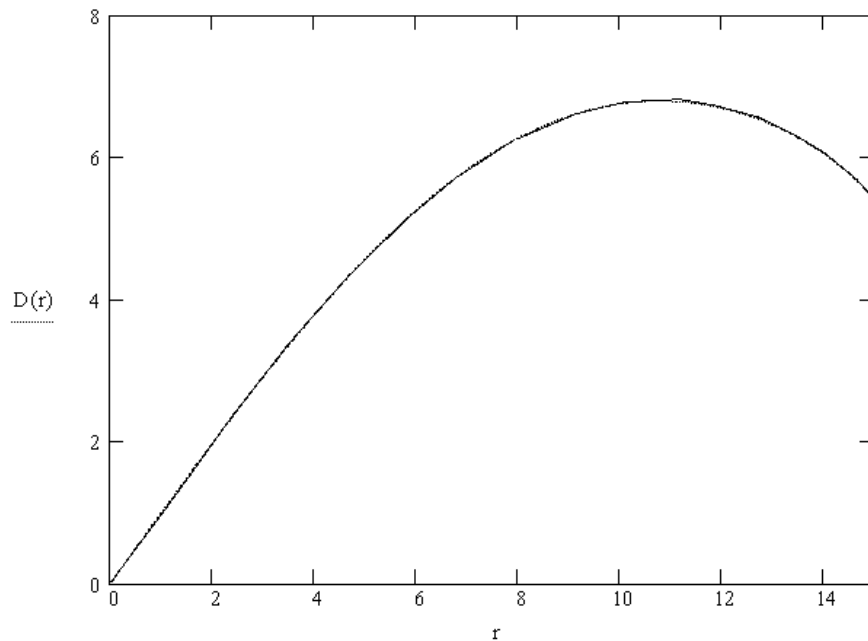


Рис. 5:

Для $r = r_b = 10.775$, $p(r) = 0.915$ и $D(r)$ проходит через точку бифуркации. Численная ошибка, вычисленная как ограниченная функция разности $err(X) = \Delta u(\mathbf{x}, r) - D(r)\theta(u(\mathbf{x}))$, не превышает 0.025%.

Анализ этих расчетов показывает, что метод переменных параметров может успешно применяться при численном, а также при аналитическом решении многомерной нелинейной краевой задачи (2). Представление решения к (2) в виде ряда Тейлора (14) может быть полезным не только для актуального расчета решения к (2) в окрестности точки бифуркации, но также для того, чтобы определить общую структуру множества решений и ее асимптотическое поведение. Осуществление этой программы требует вычисления абсолютного значения

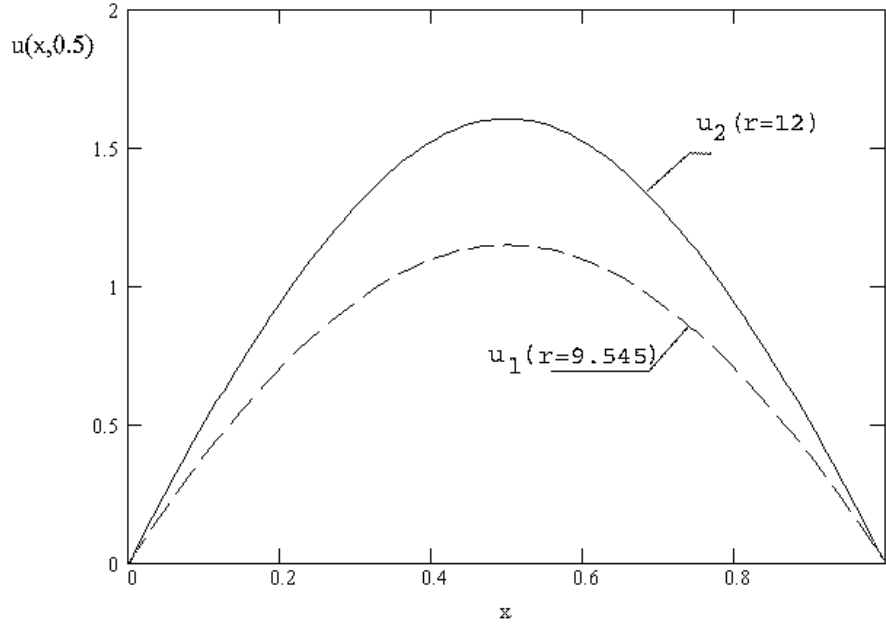


Рис. 6:

$$u_1(x) = u(x, y = 0, r = 9.545),$$

$$u_2(x) = u(x, y = 0, r = 12),$$

$$D(9.545) = D(12) = 6.692.$$

Ошибка в вычислении $u(x, r = 12)$ не превышает 0.67%.

остаточного члена ряда Тейлора, которое может быть выполнено с помощью стандартных методов, но не будет представлено здесь.

III. ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Не пертурбационные методы решения нелинейных уравнений с частными производными очень важны для техники, а в квантовой теории поля эти методы являются абсолютно ключевыми. В самом деле, применение теории возмущений обычно создает особые точки, тогда как метод переменных параметров иногда позволяет избежать их при решении уравнений квантовой теории поля. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим следующую квантово-полевую систему размерности 1+1, определенную интегралом действия:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_G \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - U(\phi) \right) dx dt, \quad (25)$$

с потенциалом

$$U(\phi, a, b, c) = \left(\frac{a}{2}\phi^2 + \frac{b}{4}\phi^4 + \frac{c}{6}\phi^6 \right),$$

где $\phi(x, t)$ функция скалярного поля и a, b, c константы. Уравнение движения, определяемое интегралом действия (25), имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial \phi} U(\phi) = -(a\phi + b\phi^3 + c\phi^5).$$

Статическая $\phi(x)$ удовлетворяет следующему нелинейному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = a\phi + b\phi^3 + c\phi^5. \quad (26)$$

Графики $U(\phi, a, b, c)$ для различных значений a, b, c представлены на Рис. 7.

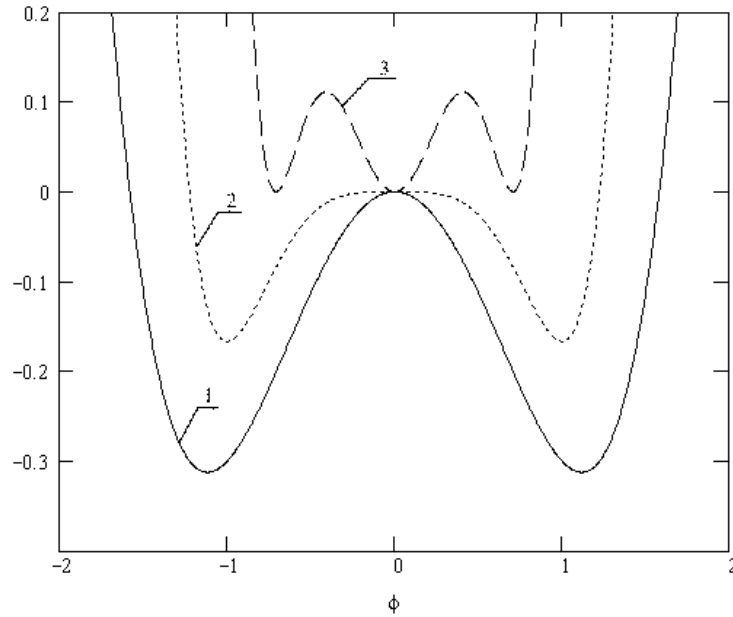


Рис. 7:

$$1 - U_1(\phi, a = -1, b = 0.8, c = 0)$$

$$2 - U_2(\phi, a = 0, b = -2, c = 2)$$

$$3 - U_3(\phi, a = 3, b = -24, c = 36)$$

График 1 на Рис. 7 представляет потенциал $U(\phi, a, b, c)$, где $a = -\mu^2 = -1$, $b = \lambda = 0.8$, $c = 0$. Этому потенциалу соответствует лагранжиан:

$$L(\phi) = \int_G \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right) dx. \quad (27)$$

Такой лагранжиан определяет стандартную модель квантовой теории поля, которая используется чтобы продемонстрировать восстановление симметрии, разрушенной вследствие "туннельного" эффекта [4,5]. Эта модель используется из-за двух важных свойств: четное основное состояние (т.к. задача симметрична) и существование двух локальных минимумов в функции потенциала при $\phi = \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$. Существенно, что "классическое" уравнение движения

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\mu^2\phi + \lambda\phi^3, \quad (28)$$

которое выведено из лагранжиана (27), обычно [4,6] подчиняется следующим граничным условиям на бесконечности:

$$\frac{d}{dx}\phi(-\infty) = \frac{d}{dx}\phi(\infty) = 0. \quad (28')$$

Не тривиальным решением этой краевой задачи является

$$\phi(x) = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \tanh\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}} x\right). \quad (28'')$$

Однако, граничные условия определенные на бесконечности исключают из рассмотрения траектории, соответствующие многократным переходам из одного экстремума в другой, т.к. такие траектории могут быть рассмотрены только если расстояние между точками экстремума $U(\phi)$ является конечным. Кроме того, топология космологической модели Фридмана требует периодических граничных условий. Таким образом, допустимо моделировать Вселенную скалярным полем, определенным на круге так, что для уравнений поля (28-28') выполняются следующие периодические граничные условия:

$$\begin{aligned} \phi(-L) &= \phi(L), \\ \frac{d}{dx}\phi(-L) &= \frac{d}{dx}\phi(L), \end{aligned} \quad (29)$$

$$L = \frac{\pi}{m}R, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где R - радиус "Вселенной", а m - число "кинков" в решении. Для простоты, в этой статье значение m будет считаться равным 1.

Вообще говоря, решения к (26) существенно зависят от коэффициентов a, b, c . Например, потенциал $U_2(\phi) = U(\phi, 0, -\mu^2, \lambda)$ (Рис. 7, кривая 2) имеет те же свойства, что и потенциал $U_1(\phi) = U(\phi, -\mu^2, -\lambda, 0)$ (Рис. 7, кривая 1), который соответствует стандартной модели, однако связанные с ним решения существенно отличаются от решения (28''). Потенциал $U_3(\phi) = U(\phi, -\eta, -\mu^2, \lambda)$ (Рис. 7, кривая 3) может быть использован чтобы построить теорию поля с двумя топологическими секторами, один из которых соответствует траектории,

переходящей из левого минимума в центральный минимум, тогда как другой соответствует траектории, переходящей из правого минимума в центральный минимум [4].

Рассмотрим уравнение движения (26) подчиняющееся периодическим граничным условиями (29). Без потери общности мы можем переместить начало отсчета в точку, где $U(\phi)$ имеет максимум. Поэтому $\phi(x)$ является четной функцией x . Следовательно, граничные условия (29) означают:

$$\frac{d}{dx}\phi(-L) = \frac{d}{dx}\phi(L) = \frac{d}{dx}\phi(0) = 0. \quad (30)$$

Дальше мы будем использовать $r = \phi(0)$ как переменный параметр таким же образом, как в (2).

A.

Рассмотрим уравнение (26) с $U = U_1$:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\phi} v^2 = -\mu^2 \phi + \lambda \phi^3, \quad (31)$$

где $v = \frac{d}{dx}\phi$. Отсюда,

$$\frac{d}{d\phi} v^2 = -\mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^4.$$

Интегрируя это выражение на $[-L; L]$ и подставляя $w = \arcsin\left(\frac{\phi}{r}\right)$ и $\chi = \frac{\mu}{\sqrt{2}}x$, получим

$$\chi(\beta) = \int_{\arcsin \frac{\phi}{r}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dw}{\sqrt{2 - \beta(1 + \sin^2 w)}}. \quad (32)$$

Объединяя (32) с граничными условиями (30), заключаем, что $v(\pm r) = 0$, которое означает:

$$\omega(\beta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dw}{\sqrt{2 - \beta(1 + \sin^2 w)}}, \quad (33)$$

где

$$\omega(\beta) = \frac{L\mu}{\sqrt{2}}, \quad \beta = \frac{\lambda r^2}{\mu^2}.$$

Так как выражение под квадратным корнем в (33) должно быть неотрицательным, $0 < \beta < 1$. График функции $\omega(\beta)$ представлен на Рис. 8.

Для получения (28") сдвинем начало системы координат в (32) к некоторой точке x так, что $\phi(x) = 0$ и $\beta \rightarrow 1$. Решения к (32, 33) могут быть интерпретированы как траектории конечных расстояний или "классические" траектории соответствующие системе, многократно переходящей из одной потенциальной ямы в другую. Некоторые публикации [5,6] указывают, что такие траектории могут давать существенный вклад в интеграл действия (25).

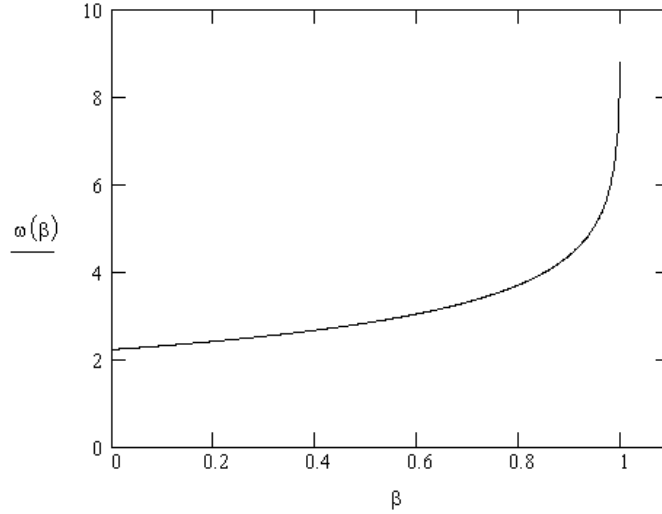


Рис. 8:

В.

Как упомянуто выше, можно сформулировать теорию квантового поля, основанную на потенциале $U_2(\phi)$ по тем же соображениям, что и для потенциала U_1 . Соответствующее уравнение движения имеет вид

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\phi} v^2 = -\mu^2\phi^3 + \lambda\phi^5. \quad (34)$$

Применяя процедуру (31-33) к уравнению (34) с граничными условиями (29) получаем

$$\chi(\tilde{\phi}, \beta) = \int_{\arcsin \tilde{\phi}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dw}{\sqrt{\beta(1 + \sin^2(w) - \beta(1 + \sin^2(w) + \sin^4(w)))}}, \quad (35)$$

$$\omega(\beta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dw}{\sqrt{\beta(1 + \sin^2(w) - \beta(1 + \sin^2(w) + \sin^4(w)))}}, \quad (36)$$

где

$$\tilde{\phi} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{r}, \quad \chi = \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \frac{\mu^2}{2} x \quad \text{and} \quad \beta = \frac{2}{3} \frac{\lambda r^2}{\mu^2}. \quad (36')$$

Из неотрицательности выражения под квадратным корнем в (36) следует, что $0 < \beta < \frac{2}{3}$. График функции (35) для $\chi(\tilde{\phi}, 0.075)$, $\chi(\tilde{\phi}, 0.662)$, при $\omega = 10$ для обоих случаев, представлен на Рис. 9.

График решения (36), $\omega(\beta)$, представлен на Рис. 10. Отметим, что решение (35) уравнения (34) соответствует кинкам, переходящим из одной потенциальной ямы в другую. Но функция

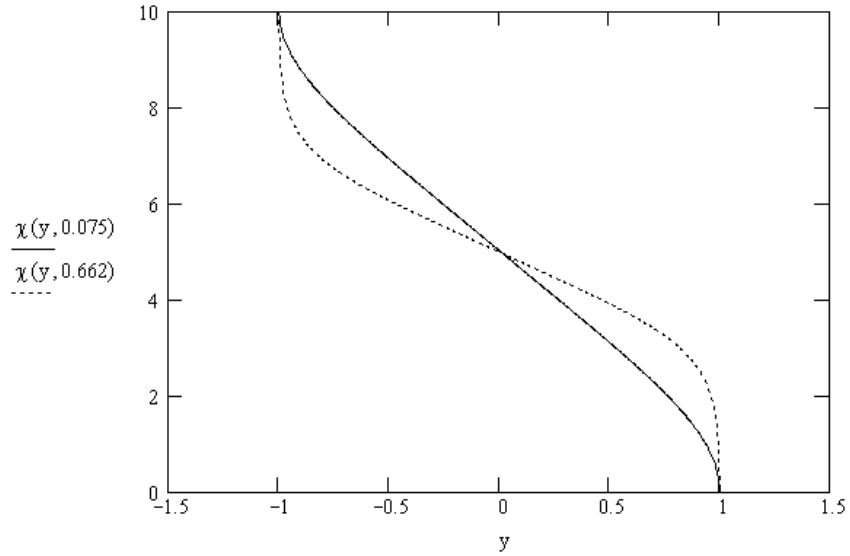


Рис. 9:

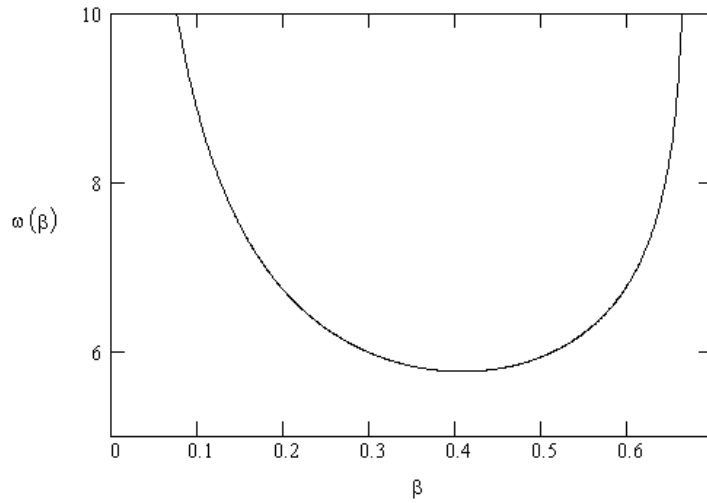


Рис. 10:

(35) качественно отличается от (28"). Во-первых, множество решений к (34) имеет две ветви: для $\omega \gtrsim 5.76$, (34) имеет два решения; для $\omega \approx 5.76$ ($\beta \approx 0.407$), уравнение (34) имеет только одно решение; для $\omega \lesssim 5.76$, решений нет вообще. Точка $\omega \approx 5.76$, $\beta \approx 0.407$ является точкой бифуркации системы (34). При $L \rightarrow \infty$, левая ветвь решения приближается к тривиальному решению, $\phi = \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$, а правая ветвь приближается к следующему решению уравнения (34):

$$\chi(\tilde{\phi}, \beta) = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left[\operatorname{atanh} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\tilde{\phi} + 1}{2\tilde{\phi}^2 + 1} \right) + \operatorname{atanh} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\tilde{\phi} - 1}{2\tilde{\phi}^2 + 1} \right) \right],$$

соответствующему граничным условиям на бесконечности.

С.

Рассмотрим уравнения движения для потенциала $U_3(\phi)$ с периодическими граничными условиями (29):

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \nu\phi - \mu^2\phi^3 + \lambda\phi^5. \quad (37)$$

Помимо квантовой теории поля, уравнение (37) особенно интересно тем, что его можно понимать как уравнение Шредингера для газа частиц, движущихся в самосогласованном потенциале $U_{eff}(\phi)$ (уравнение Гросса-Питаевского). В самом деле, уравнение (37) оказывается уравнением Шредингера соответствующим гамильтониану:

$$H(\phi) = -\frac{\hbar^2}{2m_{eff}}\Delta + U_{eff}(\phi),$$

с эффективным потенциалом

$$U_{eff}(\phi) = -\frac{\mu^2\hbar^2}{2m_{eff}}n(\Psi) + \frac{\lambda\hbar^2}{2m_{eff}}n(\Psi)^3,$$

где

$$\Psi(x, t) = \exp\left(-iE\frac{t}{\hbar}\right)\phi(x)$$

- волновая функция, $n(\Psi) = |\Psi|^2$ - плотность вероятности, m_{eff} - эффективная масса частицы, \hbar - постоянная Планка и E является собственным значением гамильтониана. Полагая $\nu = -\frac{2Em_{eff}}{\hbar^2}$, (37) становится уравнением Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_{eff}}\Delta\phi - \frac{\mu^2\hbar^2}{2m_{eff}}\phi^3 + \frac{\lambda\hbar^2}{2m_{eff}}\phi^5 = E\phi.$$

Применение процедуры (31-33) к уравнению (37) дает:

$$\chi(\phi, \beta, \eta) = \int_{\frac{\phi}{r}}^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(\beta(1+v^2 - \beta(1+v^2+v^4)) - \eta)}} \quad (38)$$

и

$$\omega(\beta, \eta, v_0) = \int_{\arcsin(v_0)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dw}{\sqrt{\beta(1 + \sin^2(w) - \beta(1 + \sin^2(w) + \sin^4(w))) - \eta}}, \quad (39)$$

где

$$\chi = \sqrt{\frac{3}{\lambda}}\frac{\mu}{2}x \quad \beta = \frac{2}{3}\frac{\lambda r^2}{\mu^2}.$$

Верхняя граница интегрирования в (38-39) определена из условия, что ϕ достигает своего максимума r при $x = 0$. Чтобы определить v_0 , заметим, что указанное периодическое

граничное условие требует минимума $\phi(x)$ в точках $x = \pm L$, отсюда $v_0 = \phi(\pm L)/r$. Эти условия выполняются, когда выражение под квадратным корнем в (38) равно нулю. Существуют два типа (подмножества) решений (38) удовлетворяющих этим условиям. Первый тип определяется условием:

$$v_0 = -1, \quad \phi(L) = -r; \quad (40)$$

и второй тип задается выражением:

$$\beta(1 + v_0^2 - \beta(1 + v_0^2 + v_0^4)) - \eta = 0. \quad (41)$$

Анализируя первое подмножество решений и подставляя (40) в (39), получаем следующее уравнение для первого типа периодических решений к (37):

$$\omega(\beta, \eta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dw}{\sqrt{\beta(1 + \sin^2(w) - \beta(1 + \sin^2(w) + \sin^4(w))) - \eta}}. \quad (42)$$

График функции $\omega(\beta, 0.24)$ представлен на Рис. 11.

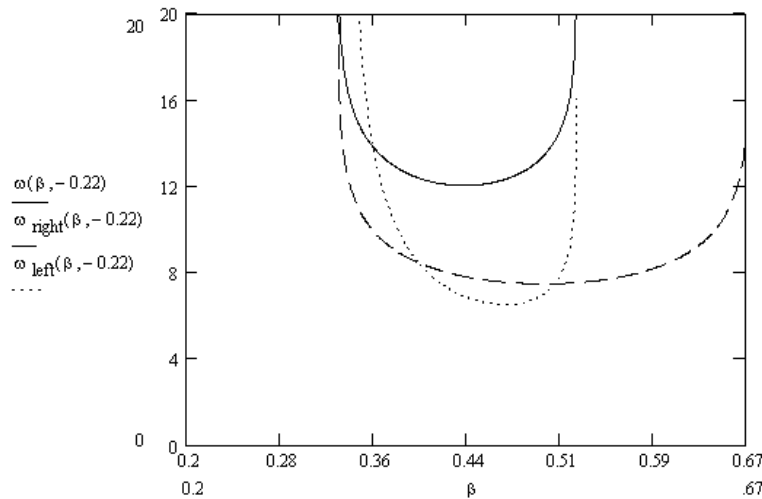


Рис. 11:

Из Рис. 11 легко увидеть, что в точке $\beta = \beta_b$, $\omega = \omega_b$, имеет место бифуркация, и для $\omega > \omega_b$ существуют два решения первого типа к (37) для каждого заданного ω . Неотрицательность выражения под квадратным корнем в интеграле (39) приводит к следующему ограничению на β :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4\eta} < \beta < \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{1 - 3\eta}.$$

Для $\beta \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4\eta}$, асимптотическое поведение $\omega(\beta, \eta)$ имеет вид

$$\omega_{left}(\beta, \eta) = -\frac{1}{\sqrt{\eta}} \ln(\beta - \beta^2 - \eta),$$

а для $\beta \rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{1-3\eta}$, получается

$$\omega_{right}(\beta, \eta) = -\frac{1}{\sqrt{3\beta - \beta^2}} \ln(2\beta - 3\beta^2 - \eta).$$

Для $\eta \rightarrow \frac{1}{4}$, интеграл (42) можно написать в виде следующего приближенного выражения:

$$\omega(\beta, \eta) = -2 \ln \left((1 - z^2) \left(\frac{1}{4} - \eta - z - 3 \left(\frac{1}{4} - \eta \right) z^2 \right) \right) - 6 \ln \left(\frac{1}{4} - \eta \right), \quad (43)$$

где

$$z = \frac{4\beta - 2}{1 - 4\eta}.$$

Как можно заметить из Рис. 11 выше, для $\eta \rightarrow \eta_0 = \frac{1}{4}$ ветви первого подмножества решений неограниченно сближаются, тогда как точка бифуркации $\omega = \omega_b$ приближается к бесконечности. Важно отметить, что не существует метода теории возмущений, который способен обнаружить этот эффективный "коллапс" ветвей первого подмножества решений (37). Но из механики "коллапса", описанного выше, следует, что для любого большого, но конечного L , существует такое $\eta \approx \frac{1}{4}$, что решения к (31) с периодическими граничными условиями (25) будут значительно отличаться от решений к (31) с граничными условиями на бесконечности.

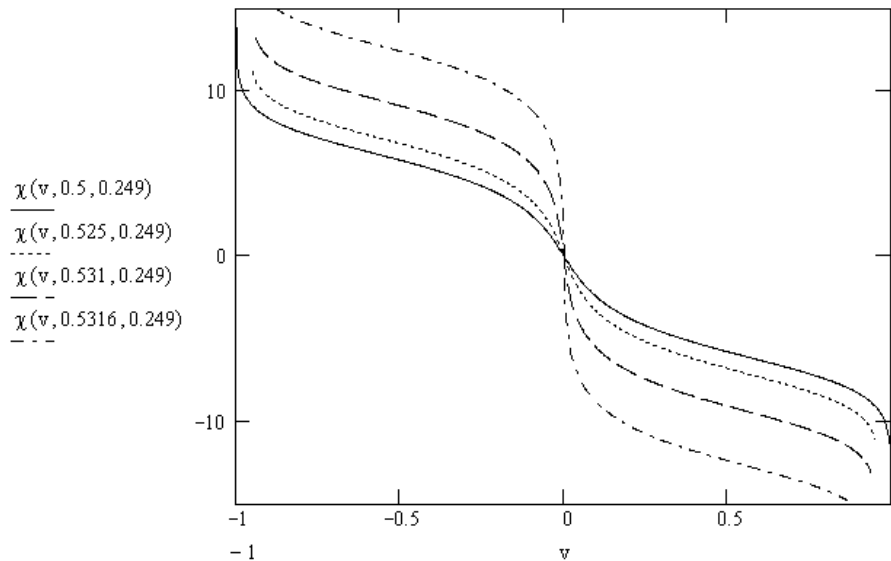


Рис. 12:

Интересно отметить, что при интерпретации (37) как уравнения Гросса-Питаевского, параметр $\eta = \frac{1}{4}$ соответствует энергии основного состояния. Разумно предположить, что это

условие может помочь определить некоторый вид процедуры квантования без использования свободных параметров и избежать возникновения особых точек в интеграле энергии, но эти рассуждения выходят за рамки данной статьи. Для получения обоснованных результатов, условие "коллапса" и метод переменных параметров должны быть применены к более реалистичным физическим моделям (т.е., к 3-мерной модели поля Янга-Миллса, электрогравитации и т.д.).

Второе подмножество решений к (31) определяется условием

$$v_0 = \sqrt{\frac{1 - \beta - \sqrt{2\beta - 3\beta^2 + 1 - 4\eta}}{2\beta}}. \quad (44)$$

Условие (44) было подставлено в формулу (39) и соответствующая функция $\omega(\beta, \eta)$ была вычислена. Результаты расчетов с использованием (38) и (39) представлены на Рис. 12 и 13.

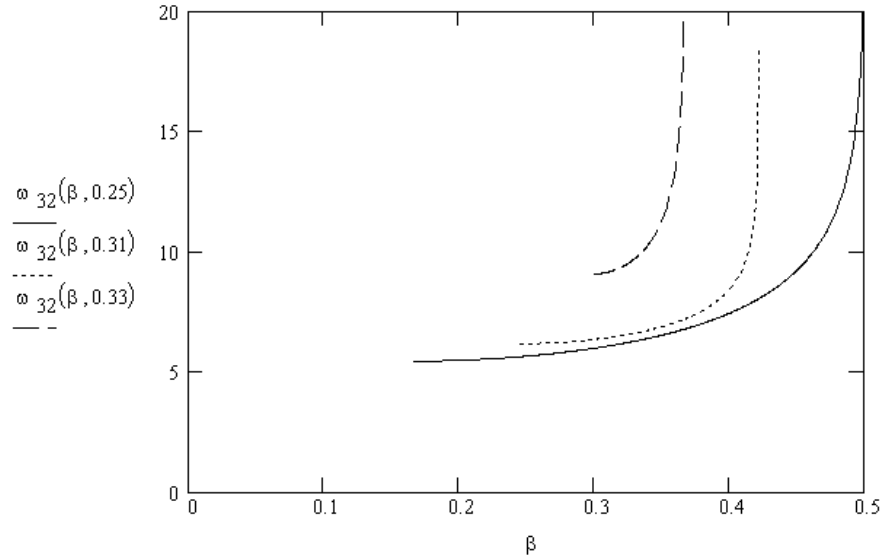


Рис. 13:

Графики функций (38) для второго подмножества решений, соответствующего условию (44), представлены на Рис. 14.

Легко видеть, что для $\beta \rightarrow \frac{1}{2}$ и $\eta \rightarrow \frac{1}{4}+$, решения к (37) вычисленные по формуле (38) после подстановки (44) сходятся с решениями к (37) с граничными условиями на бесконечности и соответствуют квантово-полевой модели с двумя топологическими секторами. В самом деле, $\eta = \frac{1}{4}$ соответствует трехявному потенциалу $U_3(\phi, a, b, c)$, показанному на Рис. 15.

Второе подмножество решений к (37), определенное условием (44), в трехявной модели соответствует переходу системы из правой ямы в центральную яму. Только условие (44) для

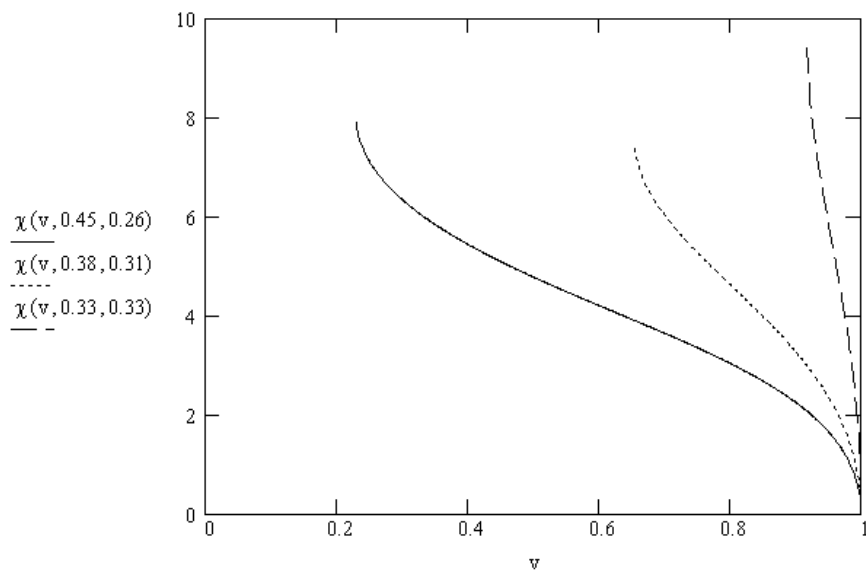


Рис. 14:

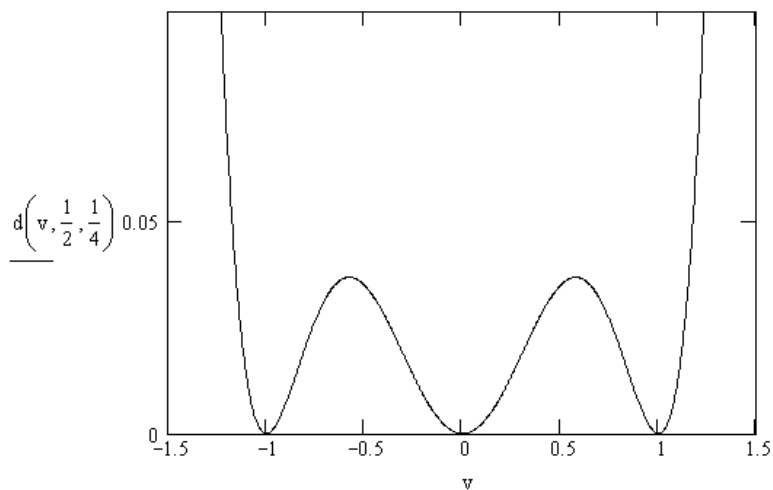


Рис. 15:

$\eta = \frac{1}{4}$ имеет единственное решение: $\beta = \frac{1}{2}$. В самом деле, после подстановки $\eta = \frac{1}{4}$ в (44), условие неотрицательности выражения под квадратным корнем принимает вид

$$1 - \beta - \sqrt{2\beta - 3\beta^2} > 0.$$

Это неравенство имеет единственное решение, $\beta = \frac{1}{2}$. Подставляя $\eta = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$ в (38),

получим решение к (37), удовлетворяющее граничным условиям на бесконечности:

$$\chi(v, \beta, \eta) = \int_{v_0}^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2) \left(\frac{1}{2}(1+v^2) - \frac{1}{2}(1+v^2+v^4) \right) - \frac{1}{4}}}. \quad (45)$$

За исключением случая $\beta = \frac{1}{2}$, $\eta = \frac{1}{4}$, $v_0 = 0$, интеграл (44) является сингулярным, означая, что уравнение (37) не имеет решений.

Поэтому, $\eta = \frac{1}{4}$ является особой точкой для уравнения (37) с периодическими граничными условиями. В самом деле, для $\eta = \frac{1}{4}$, уравнение (37), с периодическими граничными условиями, не имеет решений для любого конечного L , тогда как (37) как раз имеет решение с граничными условиями на бесконечности. Когда η приближается к $\frac{1}{4}$ сверху, периодические решения к (37), для L стремящегося к бесконечности, приближаются к пределу, соответствующему решению (37) с граничными условиями на бесконечности. Первое подмножество периодических решений к (37), для периода L стремящегося к бесконечности, и η стремящейся к $\frac{1}{4}$ снизу, не приближается к решениям к (37) с граничными условиями на бесконечности, тогда как второе подмножество периодических решений к (37) приближается к ним. Первое подмножество решений к (37) соответствует конфигурации антикинк1-кинк1-кинк2-антикинк2 (Рис. 15), которая, в свою очередь, соответствует переходу системы из правой ямы в левую яму через центральную яму. Такая конфигурация противоречит понятию топологического сектора в целом.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод переменных параметров представленный выше оказывается не только очень мощным инструментом для решения нелинейных краевых задач, но также является очень эффективным методом для классификации и теоретического анализа таких задач.

Мы показали, что существование решений, для моделей скалярного поля с трехямным потенциалом, является характерным только для граничных условий на бесконечности, тогда как модель скалярного поля (37), определенного на круге конечного радиуса, не может использовать трехямный потенциал, соответствующий $\eta = \frac{1}{4}$, т.к. эти уравнения не имеют решения. Единственным путем преодолеть это затруднение является видоизменение трехямного потенциала $U_3(\phi) = U(\phi, -\eta, -\mu^2, \lambda)$. Но модифицируя трехямный потенциал $U_3(\phi)$, надо помнить, что бесконечно малые изменения параметров этого потенциала могут вызвать значительное расхождение в решениях.

Являются ли выводы, представленные здесь, истинными для более реалистичных трехмерных моделей квантовой теории поля пока не известно, однако ясно, что универсальное

предположение о том, что наша Вселенная достаточно большая, чтобы применять граничные условия на бесконечности для моделей квантовой теории поля, требует дополнительного рассмотрения. Вообще говоря, для того, чтобы моделировать Вселенную скалярным полем, может оказаться необходимым принимать во внимание глобальную структуру Вселенной.

Александр Бродский

Авторское право от 23 августа 2004 года

E-mail: tralex55@yahoo.com

- [1] *Полозаев*, О собственных функциях уравнения $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. Доклады Академии Наук СССР (1965), стр. 1408-1411.
- [2] *D. Gilbarg, N.S. Trudinger*, Elliptic Partial Differential Equations of Secondary Order. Springer Verlag, Berlin (1989).
- [3] *H. Brezis and L. Nirenberg*, Positive Solutions of Non-Linear Elliptic Equations, Involving Critical Sobolev Exponents. Commum. Pure Appl. Math, 36 (1983), pp. 437-477.
- [4] *R. Rajaraman*, Solitons and Instantons, An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory. North-Holland Publishing Co. (1987)
- [5] *R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and H. C. Morris*, Solitons and Nonlinear Wave Equations. Academic Press, London (1982).
- [6] *A. Poliakov*, Gauge Fields and Strings (Contemporary Concepts in Physics, Vol. 3). Taylor and Francis (1987).
- [7] *Rudiger Seydel*, Practical Bifurcation and Stability Analysis, From Equilibrium to Chaos. Springer-Verlag, New York (2nd ed. 1994).
- [8] *David H. Sattinger*, Topics in Stability and Bifurcation Theory, Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1973), p. 309.